

TD 12 : Nombres réels Indications

Supremum et infimum (pratique)

1 ★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x(1-x) \mid x \in \mathbb{R}\} & B &= \left\{e^{-\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ C &= \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} & D &= \{\arctan(e^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ E &= \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\} & F &= \{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \end{aligned}$$

2 ★★★ Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

- $A = \left\{\frac{1}{p-q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } p \neq q\right\}$
- $B = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2} \mid p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $C = \left\{\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \mid p, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $D = \{p^4 - 6p^2q + 9q^2 \mid p, q \in \mathbb{R}\}$

À chaque fois, on peut prendre quelques valeurs particulières du couple (p, q) pour deviner quels seraient le sup et l'inf (s'ils existent). Cela permet ensuite d'utiliser une caractérisation, ou d'aller plus vite s'il se trouve qu'on a un max ou un min.

Supremum et infimum (théorique)

3 ★★ Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ qui est majorée.

- 1) Montrer que A possède une borne supérieure, qu'on notera M .

On admet le théorème suivant :

Si une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente, alors elle est constante à partir d'un certain rang.

- 2) En déduire que A possède un maximum.
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$. Justifier que B possède un maximum. Que vaut $\max(B)$?

4 ★★★ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée. On note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$.

- 1) Justifier que A n'admet pas de maximum.
- 2) Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intervalle $[M - \delta, M]$ contient une infinité d'éléments de A .

- 1) Raisonner par l'absurde.
- 2) Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[M - \delta, M]$ contienne un nombre fini d'éléments de A . Considérer le plus grand de ces éléments (cela a un sens car $A \cap [M - \delta, M]$ est un ensemble fini).

5 ★★★ Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides bornées.

- 1) On définit l'ensemble

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Montrer que $A + B$ est majoré et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

- 2) On définit l'ensemble

$$|A| := \{|a| \mid a \in A\}$$

Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup |A|$ en fonction des supremum et/ou infimum de A .

Pour trouver $\sup |A|$, considérer les cas $A = [1, 4]$ et $A = [-3, -2]$. En se basant sur ces exemples, que vaut $\sup |A|$?

Ensembles usuels, densité

6 ★★ (Nombres rationnels)

Rappel : si x et y sont rationnels, alors $x + y$, $x - y$, xy et x/y (si y est non nul) sont aussi rationnels.

- 1) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.
- 2) Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

On peut utiliser le résultat suivant : si n ne s'écrit pas comme le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

- 1) Raisonner par l'absurde. Passer au carré sans faire apparaitre de "double racine", i.e. $\sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- 2) Idem ! Mais il faut là encore limiter le nombre de "double racine" en passant au carré astucieusement.

7 ★★ Pour tout réel x , et entier naturel n , on pose $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- 1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$.
- 2) En déduire que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

8 ★★★ Montrer que les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$:

$$X = \{ \sqrt[n]{r} \mid r \in \mathbb{Q} \} \quad Y = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Pour Y , il y a deux méthodes.

- 1) On remarquera que $\frac{a}{2^n} = \frac{a}{2^n 5^0}$. En utilisant l'exercice suivant, que peut-on en déduire sur $\frac{a}{2^n}$? Essayer d'en faire une preuve indépendante.
- 2) On peut aussi s'inspirer de la preuve que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ qui utilise la suite de terme général $r_n = (\dots)$. Après tout, la définition de Y ressemble fortement à celle de $\mathbb{D}$...

9 ★★★ (nécessite d'avoir fait maths expertes)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\frac{1}{k} \in \mathbb{D}$ si et seulement si k peut s'écrire $2^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

- 1) Traiter le sens indirect.
- 2) Montrer que si k est un multiple de 3, alors $\frac{1}{k} \notin \mathbb{D}$.
- 3) Traiter le sens direct en raisonnant par contraposée.

- 1) Il faut réécrire la fraction $\frac{1}{2^p 5^q}$.
- 2) Si k est un multiple de 3, alors $k = 3m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Raisonner par l'absurde...
- 3) Utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers.